# الدوال اللوغارتمية

## الدالة اللوغاريتم النبيري:

### تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1
ويرمز لها بالرمز: $\ln$

### استنتاجات وخاصيات:

| | | |
|---|---|---|
| $\ln e = 1$ | $\ln 1 = 0$ | $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad \forall y \in ]0;+\infty[$<br>$\ln xy = \ln x + \ln y$<br>$\ln x^r = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$<br>$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$<br>$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ |
| $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad \forall y \in ]0;+\infty[$<br>$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$<br>$\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$ | | |
| $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad \forall y \in \mathbb{R}$<br>$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ | | |

إذا كان $n$ عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n\ln|x|$

### مجموعة التعريف:

| الدالة $f$ معرفة كما يلي | مجموعة تعريفها |
|---|---|
| $f(x) = \ln x$ | $D_f = ]0;+\infty[$ |
| $f(x) = \ln[u(x)]$ | $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ و } u(x) > 0\}$ |

### النهايات:

**نهايات أساسية:**

| |
|---|
| $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ |
| $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ |
| $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$ |
| $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ |
| $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ |

$(n \in \mathbb{N}^*)$

**استنتاجات:**

| |
|---|
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$ |
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$ |
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$ |
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$ |
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$ |
| $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$ |

هذه النهايات تبقى صالحة عند $x_0$ على اليمين أو عند $x_0$ على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

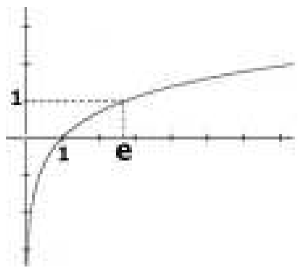
### الاتصال:

| |
|---|
| الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$ |
| إذا كانت $u$ موجبة قطعا و متصلة على مجال $I$ فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ متصلة على المجال $I$ |

### الاشتقاق:

| | |
|---|---|
| الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$<br>ولدينا: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\quad \forall x \in ]0;+\infty[$ | إذا كانت $u$ دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن الدالة $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$<br>ولدينا: $\left(\ln\left[u(x)\right]\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ $\quad \forall x \in I$ |

### التمثيل المبياني:




### إشارة $\ln$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $+$ |

## الدالة اللوغاريتم للأساس $a$ حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

### تعريف:

| |
|---|
| الدالة اللوغاريتم للأساس $a$ هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$ |
| حيث: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \forall x \in ]0;+\infty[$ |

حالة خاصة: الدالة $\ell og_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: $\ell og$

### استنتاجات و خاصيات:

| | |
|---|---|
| $\ell og_a 1 = 0$<br>$\ell og_a a = 1$ | $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad \forall y \in ]0;+\infty[$<br>$\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell n g_a y$<br>$(r \in \mathbb{Q})\ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$<br>$\ell og_a \dfrac{1}{x} = -\ell og_a x$<br>$\ell og_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$ |
| $\forall x \in ]0;+\infty[ \quad \forall r \in \mathbb{Q}$<br>$\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$ | |

### نهايات و متراجحات:

| $a > 1$ | $0 < a < 1$ |
|---|---|
| $\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$ | $\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$<br>$\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$<br>$\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$ |

### المشتقة:

$$\forall x \in ]0,+\infty[ \qquad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$